

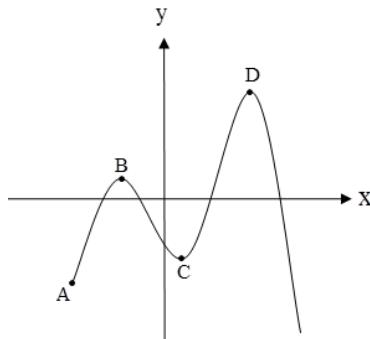
# קורס מבוא למתמטיקה כלכנית

## פרק 10 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציהות פולינום

### תוכן העניינים

1	. נקודות קיצון של פונקציות .....
4	.2. חקירת פונקציה פולינומית.....
8	.3. פונקציה זוגית ואי-זוגית.....

## נקודות קיצון של פונקציות:



**סיכום כללי:**

**נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):**

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B, C, D – A.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

**נקודות קיצון מקומיות:**

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומיות. נקודת צו נקראת נקודת חסודה בקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

**שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:**

- נגזר את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- $x$  של הנקודות החשודות בקיצון.
- נציב את ערכי ה- $x$  מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- $y$ .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסוווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

**שאלות:**

1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x) = 10x - x^2$ .

2) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 12x$ .

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העליה והירידה של הפונקציה?

3) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ .

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העליה והירידה של הפונקציה?

4) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$ .

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העליה והירידה של הפונקציה?

5) לפונקציה  $f(x) = ax - x^3 - 5$  יש נקודת קיצון בנקודת שבה  $x = -1$ .

מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

6) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ . ידוע שהנקודת  $x = 1$  נקודת קיצון.

מצא את הקבוע  $a$ .

7) לפונקציה  $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$  יש נקודת קיצון בשיעוריה:  $(2, 3)$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $A$ ,  $B$ .

8) לפונקציה  $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$  יש נקודת קיצון ב- $x = -1$  ו- $x = 4$ .

מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- $y$  של שתי נקודות הקיצון.

9) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ . ידוע שהנקודת  $(1, 2)$  נקודת קיצון.

מצא את הפרמטרים  $a$ ,  $b$ .

10) לפונקציה  $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$  יש נקודת קיצון בשיעוריה  $(2, 3)$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$ ,  $b$ .

**תשובות סופיות:**

$\cdot \max(5, 25) \quad \text{1}$

$\cdot -2 < x < 2 : x < -2, x > 2 : \text{ עולה} \quad \min(2, -16), \max(-2, 16) \quad \text{א. 2}$

$\max(0, 9), \min(\sqrt{5}, -16), \min(-\sqrt{5}, -16) \quad \text{א. 3}$

$\cdot x < -\sqrt{5}, 0 < x < \sqrt{5} : x > \sqrt{5}, -\sqrt{5} < x < 0 : \text{ יורדת} \quad \text{ב. 2}$

$\cdot x < 3 : \text{ עולה} \quad \min(3, 5) \quad \text{א. 4}$

$\cdot a = 3 \quad \text{5}$

$\cdot a = -\frac{2}{3} \quad \text{6}$

$\cdot A = -1, B = 3 \quad \text{7}$

$\cdot A = \frac{1}{3}, B = -\frac{3}{2}, \left(-1, 2\frac{1}{6}\right), \left(4, -18\frac{2}{3}\right) \quad \text{8}$

$\cdot b = 6, a = -4 \quad \text{9}$

$\cdot a = 2, b = -16 \quad \text{10}$

## חקירה פונקציית פולינומית:

**שאלות:**

11) נתונה הפונקציה  $f(x) = 10x - x^2$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

12) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 12x$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

13) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

14) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$  חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**15)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3$ . חקרו את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדלה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**16)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$ .

א. לאלו ערכים של הפרמטר  $a$  עולה הפונקציה בכל תחום הגדלה?

ב. הציב בפונקציה  $a = 6$  וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:  
תחומי הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם

ציר ה- $y$ , שרטוט.

**17)** נתונה הפונקציה:  $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$  (  $d$  פרמטר).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = 2$ .

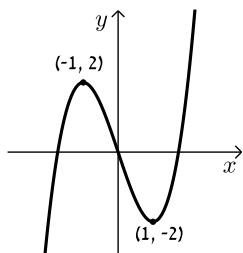
א. מצא את  $d$ .

ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

ג. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



**18)** לפניך גרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 3x$ :

א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 5$ ?

ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 2$ ?

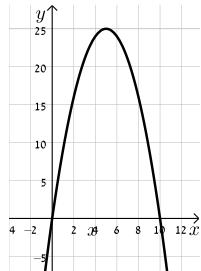
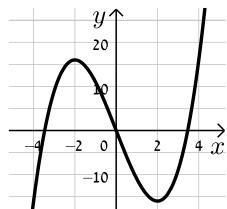
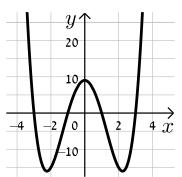
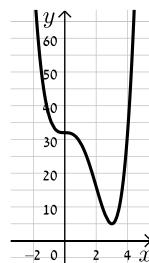
ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 0.5$ ?

ד. עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיקות פתרון אחד?

ה. עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיקות שני פתרונות?

ו. עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיקות שלושה פתרונות?

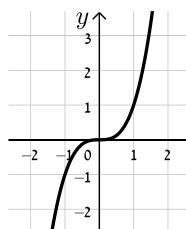
ז. האם קיימים ערך של  $k$  עבורו למשוואה  $f(x) = k$  אין פתרון?

**תשובות סופיות:**ג. עלייה :  $x < 5$ , ירידה :  $x > 5$ ב.  $\max(5, 25)$  א. כל  $x$ ד.  $(0,0), (10,0)$  .  
כ. להלן גרף :א. כל  $x$  ב.  $\min(-2, -16), \max(-2, 16)$ ג. עלייה :  $-2 < x < 2$ , ירידה :  $x < -2, x > 2$ ה. להלן גרף : .  
 $(0,0), (\sqrt{12}, 0), (-\sqrt{12}, 0)$  .  
ד.ב.  $\max(0, 9), \min(\sqrt{5}, -16), \min(-\sqrt{5}, -16)$  א. כל  $x$ ג. עלייה :  $0 < x < \sqrt{5}$ , ירידה :  $x < -\sqrt{5}, x > \sqrt{5}$ ,  $-\sqrt{5} < x < 0$ ה. להלן גרף : .  
 $(0,9), (\pm 1,0), (\pm 3,0)$  .  
ד.ג. תחומי עלייה :  $x > 3$ , תחומי ירידה :  $x < 3$ ב.  $\min(3, 5)$  א. כל  $x$ ד.  $(0, 32)$  .  
ה. להלן גרף :ג. עולה לכל  $x$ 

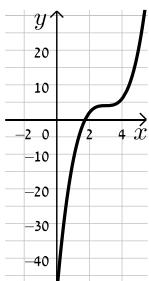
ב. אין.

א. כל  $x$ 

ה. להלן גרף :

ד.  $(0,0)$  .  
כ. לא יתאפשר.

16) א.  $-6 < a < 6$  – ב. תחום הגדרה: כל  $x$ , נקודות קיuzzן: אין, תחומי עלייה: כל  $x$ ,



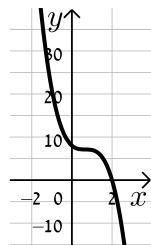
תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים:  $(0, -50)$ , להלן גרפ:

$$x \neq \frac{2}{3}$$

ב. לא.

$$d = 8$$

ה. להלן גרפ: ד.  $(0, 8)$



$$k > 2, k < -2$$

.ג.

ב. 2

.1 א. (18

ז. לא.

$$-2 < k < 2$$

$$k = \pm 2$$

## פונקציה זוגית ואי-זוגית:

**סיכום כללי:**

**הגדרות:**

- פונקציה  $f(x) = f(-x)$  תיקרא **זוגית** אם לכל  $x$  בתחום הגדרתה מתקיים :
- פונקציה  $f(x) = -f(-x)$  תיקרא **אי-זוגית** אם לכל  $x$  בתחום הגדרתה מתקיים :

**שאלות:**

1) קבעו אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו :

ב.  $f(x) = 3x^2$

א.  $f(x) = 3x - 5$

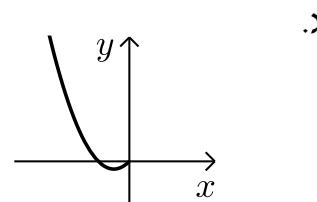
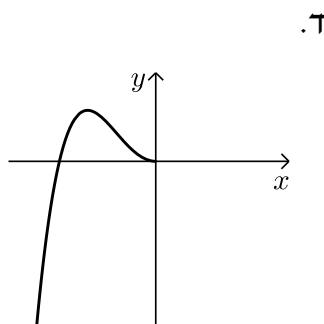
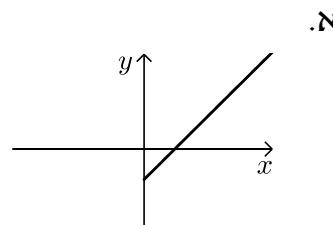
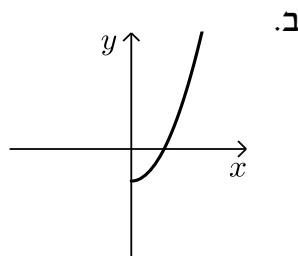
ד.  $f(x) = x^3 - 2x^2$

ג.  $f(x) = 2x^3$

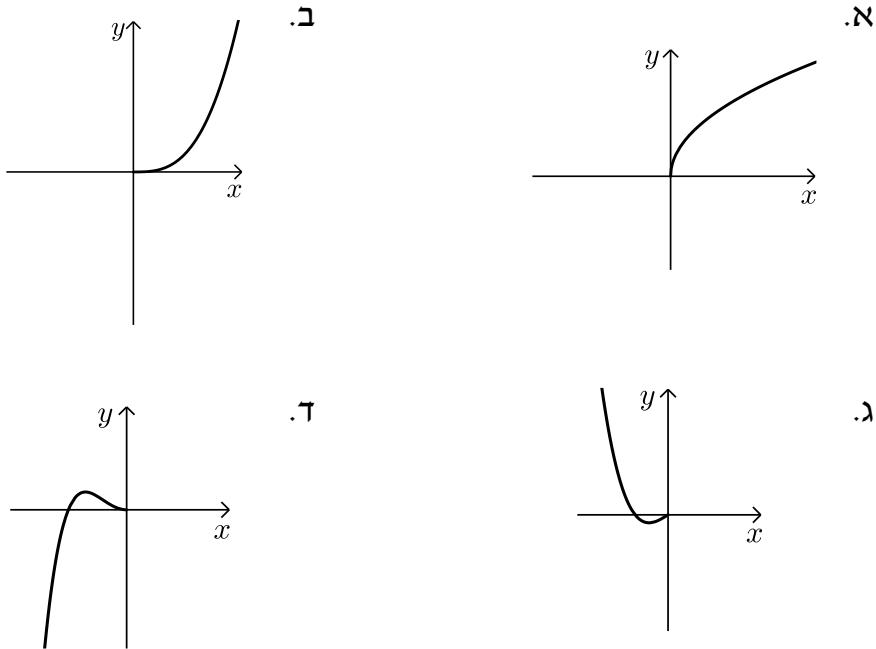
ו.  $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$

ח.  $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

2) הפונקציות המשורטוטות להלן מוגדרות לכל  $x$ .  
השלם את צירור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית :



(3) הפונקציות המסוורטוטות להלן מוגדרות לכל  $x$ .  
 השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:



- (4) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^4 - 4x^2$  בתחום:  $[0:3]$
- א. חקוך את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:
- i. תחום הגדרה.
  - ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
  - iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
  - iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
  - v. סרטוט סקיצה של גраф הפונקציה.
- ב. הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית.
- ג. התבוסס על ממצאים מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום:  $[-3:3]$  (הוסף את סרטוט גраф הפונקציה בתחום  $[0:-3]$  לgraf שסרטתה בסעיף הקודם).

5) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$ .

א. חקרו את הפונקציה בתחום:  $[0:4]$  לפי הסעיפים הבאים:

תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- $y$ , מציאת נקודות קיצון וסיוגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?  
נמק באמצעות חישוב מတאים.

ג. הסתמך על מנת מציאת מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שרטטת בסעיף א', את עוקם הפונקציה בתחום  $[-4:0]$ .

ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל  $x$  בתחום הגדרתה.

6) לפניך הפונקציה:  $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$ ,  $a$  פרמטר.

ידעו כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצא את  $a$  וכותב את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חקרו את הפונקציה בתחום:  $[-2:0]$  לפי הסעיפים הבאים:  
 כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיוגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?  
נמק באמצעות חישוב מတאים.

ד. הסתמך על מנת מציאת מהסעיפים הקודמים וסרטט את גраф הפונקציה בתחום:  $[-2:2]$ .

7) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 3x^3 - 9x$ .

א. חקרו את הפונקציה בתחום:  $[0:5]$  לפי הסעיפים הבאים:  
 כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיוגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ג. התבוסס על מנת מציאת מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום:  $[-5:0]$  (הוסף את סרטוט גраф הפונקציה בתחום  $[-5:0]$  לgraf שרטט בסעיף הקודם).

8) לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$ ,  $b$  פרמטר.  
ידוע כי הישר  $x=2$  עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה  
שמקיימות:  $f'(x) = 0$ .

- מצא את  $b$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .
- חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:2]$  לפי הסעיפים הבאים:
  - תחום הגדרה.
  - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
  - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
  - כטיבת תחומי עלייה וירידה.
  - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.  
נמק את קביעותך באמצעות חישוב מתאים.
- הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה  
של גרף הפונקציה את הגרף בתחום  $[-2:0]$ .

- 9) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$
- חקור את הפונקציה בתחום:  $[-4:0]$  לפי הסעיפים הבאים:
    - תחום הגדרה.
    - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
    - מציאת נקודות קיצון וסיווגן  
(בתשובה השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
    - כטיבת תחומי עלייה וירידה.
    - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?  
נמק עי'י חישוב מתאים.
  - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית  
את גרף הפונקציה בתחום  $[0:4]$ .

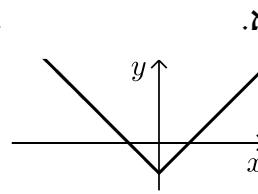
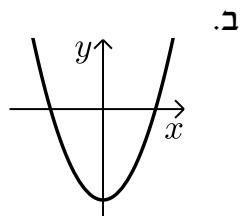
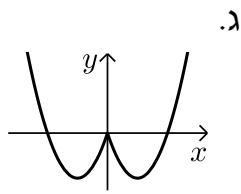
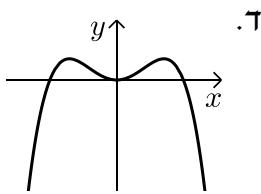
**תשובות סופיות:**

לא זו ולא זו : א', ד', ו'.

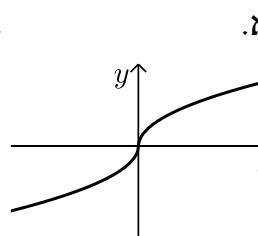
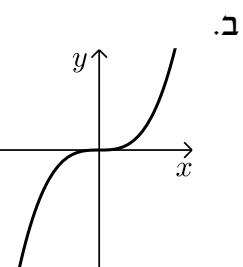
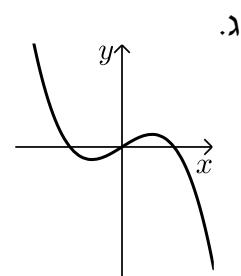
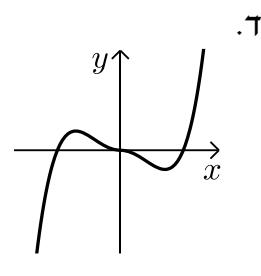
אי-זוגית : ג'.

1) זוגית : ב', ה'.

2) להלן הגרפים :

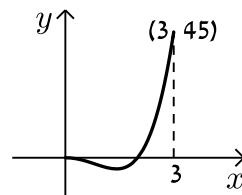
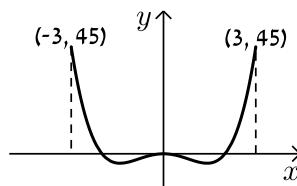


3) להלן הגרפים :



$$, \min(\sqrt{2}, -4) \text{ קצת, } \max(3, 45) . \text{iii} \quad (0,0), (2,0) . \text{ii} \quad 0 \leq x \leq 3 . \text{i} \quad \text{4}$$

. ב. עולה :  $0 < x < \sqrt{2}$ , יורדת :  $\sqrt{2} < x < 3$  . סעיף הוכחה.  $\max(0,0)$ .

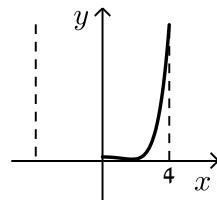
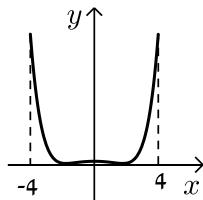
**סרטוט עבור סעיף ג:**

5) א. תחום הגדרה :  $(0,3) : y = 0, 0 \leq x \leq 4$ , חיתוך עם ציר ה- $x$ .

נקודות קיצון :  $\max(0,3) , \min(1,1) \text{ קצת, } \max(4,4051) \text{ קצת,}$

וליה :  $0 < x < 1$ , יורדת :  $1 < x < 4$  . זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

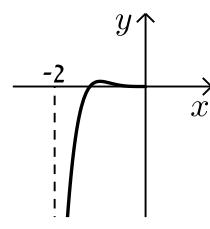
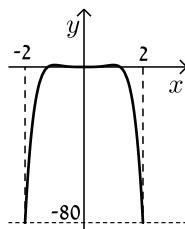
**סרטוט עבור סעיף ג:**

ב. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq -2$ , חיתוך עם הצירים: א.  $a = 0$  (6)

נקודות קיצון:  $\min(0,0), \max(-1,1)$ , קצה:  $\min(-2,-80) = -80$

ג. זוגית. עליה:  $-1 < x < 0$ , יורדת:  $0 < x < -2$ .

**סרטוט עבור סעיף א:**

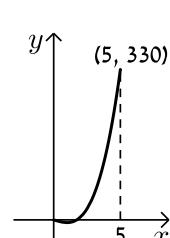
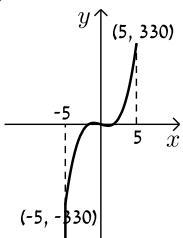


א. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 5$ , חיתוך עם הצירים: (0,0),  $(\sqrt{3}, 0)$  (7)

נקודות קיצון:  $\max(0,0), \min(1,-6) = -6$ , קצה:  $\max(5,330) = 330$

ב. אי-זוגית. עליה:  $1 < x < 5$ , יורדת:  $0 < x < 1$ .

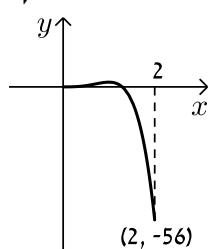
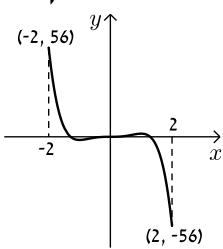
**סרטוט עבור סעיף ג:**



א.  $b = 0$ . תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 2$  ב.  $i$  (8)

ג. זוגית. עליה:  $0 < x < 1$ , יורדת:  $1 < x < 2$ . קצה:  $\min(0,0), \max(1,2)$

**סרטוט עבור חלק ד:** ג. אי-זוגית.



א.  $i$ . תחום הגדרה:  $-4 \leq x \leq 0$  ב.  $ii$  (9)

ג. זוגית. עליה:  $-4 < x < -0.723$ , יורדת:  $-0.723 < x < 0$ . קצה:  $\min(-4, -5460)$

**סרטוט עבור חלק ד:** ג. אי-זוגית. עליה:  $-4 < x < 0$ , יורדת:  $-0.723 < x < 0$ .

